

九元連立方程式求解機

和田 英一 (IJJ 技術研究所)

その来歴

国立科学博物館の地球館に、「九元連立方程式求解機」という大きい格子の箱のような形の機械が展示してある(下の図-1, 本稿の写真は科学博物館で撮影させてもらった)。つまり9個の変数を持つ連立方程式を解くアナログ計算機である。この機械について、科学博物館の前島研究員の報告¹⁾があり、それによるとこの計算機の来し方は次の通りである。

1938年頃、東京帝国大学航空研究所の佐々木達治郎を中心として、機械式計算機の開発が進んでいた。MITのWilburの作った連立方程式の求解機の情報に基づき、志賀亮と三井田純一が九元連立方程式求解機の製作を担当した。研究は、統計数理研究所の前身の、航空計数研究所で行われた。九元連立方程式求解機の完成は、1944年頃といわれる。

その後、東京大学第二工学部(後の生産技術研究所)に移し、戦後は佐々木邸に置かれていたが、佐々木家の庭の小屋で組み立てられ、統計数理研究所の所員などが使用していた。1962年に、航空計数研究所から科学博物館に寄贈された。この種の計算機は、MITを始め数台

作られたが、現存するのは本機だけらしい。

その原理

連立方程式を解くアナログ計算機は、1878年にKelvin (William Thomson)が提案し²⁾、1934年頃から、MITにおいてJohn B. Wilburが製作した³⁾。図-2でその原理を示す。

2元連立方程式

$$a_{00}x + a_{01}y + c_0 = 0 \quad (0)$$

$$a_{10}x + a_{11}y + c_1 = 0 \quad (1)$$

を解きたいとする。

この計算機は、図-2のようにそれぞれ変数 x , y , 定数に対応する3枚のプレート(左からプレート1(変数 x 用), プレート2(変数 y 用), プレート3(定数用))があり、軸のまわりに回転できる。それぞれのプレートには、今の例では、式(0)と式(1)に対応する、2個のミドルランナーというプリーアがあり、それを軸から係数(や定数)に比例した距離に固定する。図には式(0)に相当する設定のみを示す。

x 用のプレート1には、ミドルランナーを軸から a_{00}



図-1 九元連立方程式求解機全景(手前に立っているのが情報処理技術遺産の認定盾)

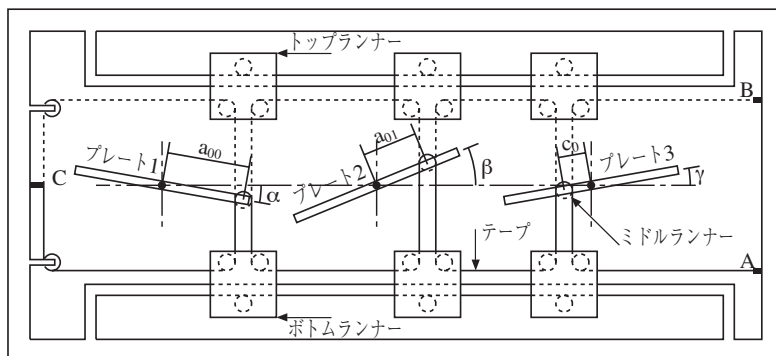


図-2 連立方程式求解機の原理図

の距離に固定する。y用のプレート2には、ミドルランナーを軸から a_{01} の距離に固定する。定数用のプレート3には、ミドルランナーを軸から c_0 の距離に固定する。軸より左に固定するのは、 $c_0 < 0$ だからだ。

式(0)の関係を制約するには、鋼鉄製のテープを使う。テープの一端を、枠の右方のAで固定し、それから右のボトムランナー、ミドルランナー、ボトムランナーを通し、さらに中央のボトムランナー、ミドルランナー、ボトムランナーを通し、左でも同様にし、枠の左のクランプCを経由してから、上にいって3つのトップランナーと、ミドルランナーを図のように通過してBで固定する。ボトムランナーとトップランナーは、左右に動くことができ、ミドルランナーの真下と真上にくるように設定する。

CからBまでのテープが破線なのは、これは張力を保つためだけなので、計算の本質には関係ないからだ。

容易に分かるように、プレート1が α だけ傾くと、そこでテープ長は $2a_{00} \sin \alpha$ だけ変わり、他のプレートもそのために傾き、 $2a_{00} \sin \alpha + 2a_{01} \sin \beta + 2c_0 \sin \gamma = 0$ となる。したがって $a_{00} \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} + a_{01} \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + c_0 = 0$ の関係は保たれる(図-2でも、左と右のミドルランナーの中央から下がった分の和だけ、中のミドルランナーが中央から上がるよう、正確に書いてある)。 $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = x, \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = y$ で(0)の式になる。

もう1本のテープとランナー類を使い、(1)の式についても同じことができ、プレートが傾いて静止したときの角度から、 x, y の値が得られる。

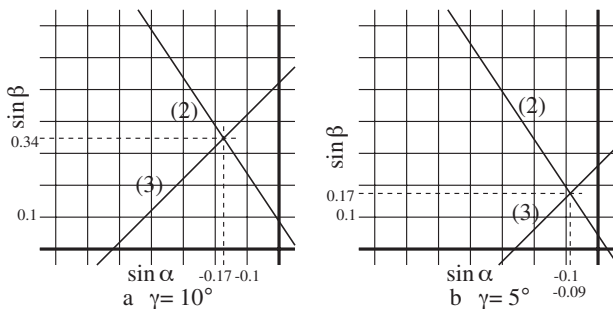


図-3 プレートの傾き角

ところで、

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad (2)$$

$$-x + y - 3 = 0 \quad (3)$$

を解いたとき、各プレートの傾き角 α, β, γ の関係は、式(2)から $3 \sin \alpha + 2 \sin \beta = \sin \gamma$ 、式(3)から $-\sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin \gamma$ だから、図-3で $\gamma = 10^\circ$ (a), $\gamma = 5^\circ$ (b)での、 $\sin \alpha$ と $\sin \beta$ の関係を示す。

図-3のa(左の図)から $\sin \alpha = -0.17, \sin \beta = 0.34$ 程度と読める。 $\sin 10^\circ = 0.1736$ 、だから、 $x \approx -1, y \approx 2$ と結論できる。

$\gamma = 10^\circ$ で静止した図を想像して描いてみると、図-4のようになる。 c_0, c_1 が負なので、これらのミドルランナーはプレートの回転軸より左に描いてある。

今は変数が2つであったが、この関係は変数が増えても同じであり、Wilburは9元の方程式を解く計算機に挑戦した。

その構造

まずがっちりした鉄枠を用意し、その中に、9つの変数用と1つの定数用として、10枚のプレートを置く。9元連立方程式の式は9個だから、式に対応するテープは都合9本。それぞれ10個のボトムランナー、ミドルランナー、トップランナーを通るので、1本の長さは60フィートもあった。テープをスムーズに動かすべく、ボールベアリング付きのプーリーを1000個使用したという。概算すると、ボトムランナー、トップランナーには3個、ミドルランナーには、下用と上用の2個で1プレート、1テープあたり計8個。したがって $8 \times 10 \times 9 = 720$ 個は必要で、実際は上下2段になっているので、その折り返しなどにも使うと、たしかに1000個にはなるう。

プレートには、テープが9本くるから、ミドルランナーを9個つけるスリットがある。ミドルランナーは正確に固定する必要がある、各スリットの端のマイクロメータで調節できる。Wilburの記述によると、プレートには10本目のスリットがあり、それにより、角度の正

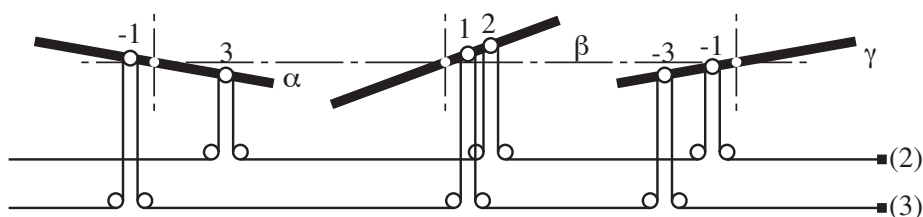


図-4 $\gamma = 10^\circ$ で静止した図

弦が読み取れるそうだが、A Computer Perspective⁴⁾の113ページ(原書、訳書とも)にある、Wilbur 計算機のプレートの写真を見ても、10本のスリットはまったく同じに見える。

科学博物館で、本機を見るとその仕掛けが判明した。それぞれのプレートごとに、そこだけで完結するテープが、手前から5本目のスリットに付いていた。またそのテープの上下する部分に目盛尺があり、テープ側には副尺が付いていて、ミドルランナーの上下した距離が読めるのであった(図-5)。その距離を、ミドルランナーの支点からの距離で割れば、角度の正弦が分かるわけだ。

プレートを支える軸も、丈夫でなければならず、また傾きによって、ミドルランナーとの距離が変わってはまずいので、巧妙な仕掛けが要ったであろう。Kelvinは、天秤を支えるナイフエッジのようにすると書いた。

使用法

この計算機は次のようにして使うらしい。まずすべてのテープのクランプCを緩める。次に使用するプレートをほぼ水平にし、回転しないようにクランプする。ミドルランナーに係数と定数を設定する。つまり軸からの距離が変数の係数、定数に比例するような位置に固定する。プレートの端のマイクロメータを使い、1/500インチの精度で設定する。この作業に最も時間がかかる。その後、使用するプレートのクランプを緩め、使用するテープのCのクランプを固定する。

これで使用するプレートは回転できるようになるが、一番大きく回転するプレートを見つけ、それを駆動プレートとする。図-3の例では、中央のy用のプレートである。駆動プレートを時計回りに40度程度回転すると、ほかのプレートは振動した後、停止する。停止したら各プレートの角度の正弦(sin)を読み取る。

次にこの駆動プレートを、反対方向に同じように回転させる。他のプレートは再び振動の後停止する。そこで

各プレートの角度の正弦を読み取る。

変数の値は、その変数の2回の角度の正弦の差を、定数の2回の角度の正弦の差で割って得られる。このように計測するのは、零点付近の誤差を相殺するためであろう。

係数、定数の設定が終わってれば、この作業は数分で終わる。

Wilburはこの程度の説明しかしていないが、プレートが傾くに従い、トップランナーとボトムランナーを、その部分でテープがほとんど鉛直になるよう、調整しなければならず、これが結構面倒なのではないかと想像する。最初の2元連立方程式の程度でも、トップランナー、ボトムランナーは6個ずつ存在する。

どういう感じでプレートが傾くか、様子を知りたい。そこでProcessingを使い、アニメーションを作った。<http://playground.iijlab.net/~ew/eqsolv/eqsolv.html>を見てほしい。この記事の図-4に対応させたつもりである(図-6)。ただし、図-4のほかにトップランナーも描いてある。設定してある係数と定数は、(2)と(3)のもので、プレートを水平にして、ミドルランナーを設定した状態になっている。

右端のプレート(定数用)の右端付近へマウスを持っていき、上方へドラッグすると、プレートが左に傾く。それと同時にテープによる制約で、他のプレートもそれぞれ傾く。右のプレートを10度くらいに持ち上げると、図-4の状態になる。

文献3)には、Wilburらしき人が操作している写真があるが、ほとんど真っ黒で分からない。文献4)の写真の方がよく分かる。

その写真

科学博物館に出かけ、九元連立方程式求解機の写真を撮らせてもらった。全景は前に示した。図-7はプレートを真横から見たもので、支点の直ぐ下から右に出てい

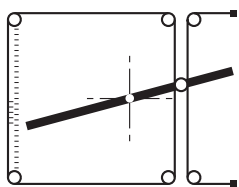


図-5 正弦量読み取り

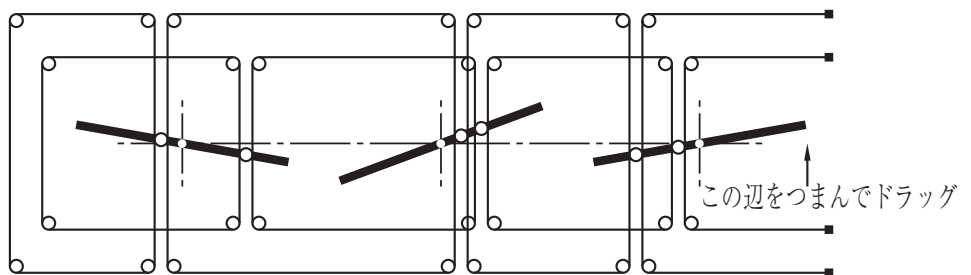


図-6 シミュレータ

るのは、プレートの固定装置(クランプ)である。両端に正弦量を見る目盛尺が立っている。

図-8は、プレートを上から見たもの。ミドルランナーの動くスリットが見え、左の方にミドルランナーと、それから上に延びるテープが見える。右端に竜頭状のものがあるのは、マイクロメータで、これを回転すると、ミドルランナーが左右に動く。その位置を読む目盛尺も見える。細かい距離はスクリューの方で読む。このマイクロメータは、奥には手が入れにくいから、手前の5個だけこの位置にあり、向うの5個は左奥についている。

図-9はミドルランナーを上から見る。最初に示した原理図では、ミドルランナーは上に向うテープと、下に向うテープが同一に描いてあったが、実際はこの写真で見ると、上下に2個になっていた。

図-10は、中央に目盛尺が見え、それに接して副尺が見える。副尺はテープに固定されている。

精度改善法

デジタル計算機屋から見ると、アナコンの精度は不安材料である。ところがこの計算機は、Kelvinも書いているように、逐次計算により、精度を得ることができる。その方法は次の通りである。

今度は連立方程式を

$$a_{00}x + a_{01}y = c_0 \tag{4}$$

$$a_{10}x + a_{11}y = c_1 \tag{5}$$

と書く。

これを解いて x' と y' が得られたとする。つまり

$$a_{00}x' + a_{01}y' = c'_0 \tag{6}$$

$$a_{10}x' + a_{11}y' = c'_1 \tag{7}$$

と書くと、 $x' = x, y' = y$ (つまり正確な値が得られた) なら $c'_0 = c_0, c'_1 = c_1$ である (c'_0, c'_1 は手回し計算機などで求める)。

違うなら、(4)-(6), (5)-(7) で

$$a_{00}(x-x') + a_{01}(y-y') = c_0 - c'_0 \tag{8}$$

$$a_{10}(x-x') + a_{11}(y-y') = c_1 - c'_1 \tag{9}$$

を作る。

右辺の定数を $c_0 - c'_0, c_1 - c'_1$ として、もう一度この連立方程式を解くと、前の x', y' の代わりに、 $x - x', y - y'$ が得られる。これをそれぞれ前に得られた値 x', y' に加えると、 x, y が得られるということで、これを繰り返すらしい。再計算の場合、変数のミドルランナーの設定は変えないところが、利点である。

手元に計算機があるから、さっそくやってみることにする。

添字が面倒なので、ここでは

$$ax+by=c$$

$$dx+ey=f$$

と書くと $x=(ce-bf)/(ae-bd), y=(af-cd)/(ae-bd)$ と解ける。これに x は 1.1 倍し、 y は 0.9 倍する誤差をわざと入れてみる。

Scheme のプログラムはこう書いた。

```
(define (solv a b c d e f)
  (let* ((det (- (* a e) (* b d)))
         ; 分母の行列式
         (x (* (/ (- (* c e) (* b f)) det)
                1.1))
         ; 誤差を入れる
         (y (* (/ (- (* a f) (* c d)) det)
                0.9))
         ; 誤差を入れる
         (c0 (+ (* a x) (* b y)))
         (f0 (+ (* d x) (* e y))))
    (list (list x y) a b (- c c0)
          d e (- f f0))))
```

c_0 と f_0 は上の c'_0 と c'_1 のこと。結果は最初に新しい x と y のリスト。続いて次に解くための引数をリストにして出す。

$x = 2, y = 3$ と決め、 $a_{00} = 2, a_{01} = 1, a_{10} = 1, a_{11} = 2$ とすると、最初は (solv 2 1 8 1 2 7) である (以下

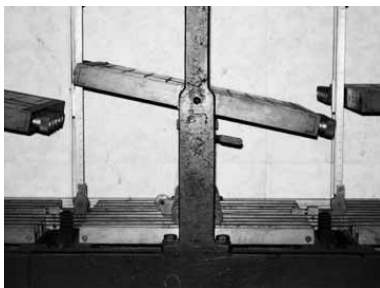


図-7 プレート



図-8 プレート



図-9 ミドルランナー

で => は評価の結果を示す).

```
(solv 2 1 7 1 2 8) =>
((2.2 2.7) 2 1 -.1 1 2 .4)
```

以後次のように進行する.

```
(solv 2 1 -.1 1 2 .4) =>
((-0.22 .27) 2 1 .07 1 2 .08)
```

```
(+ 2.2 -.22) => 1.98
(+ 2.7 .27) => 2.97
```

```
(solv 2 1 .07 1 2 .08) =>
((2.2e-2 2.7e-2) 2 1 -1.e-3 1 2 4.e-3)
```

```
(+ 1.98 2.2e-2) => 2.002
(+ 2.97 2.7e-2) => 2.997
```

```
(solv 2 1 -1.e-3 1 2 4.e-3) =>
((-2.2e-3 2.7-3) 2 1 7.e-4 1 2 8.e-4)
```

```
(+ 2. -2.2e-3) => 1.9998
(+ 2.997 2.7e-3) => 2.9997
```

```
(solv 2 1 7.e-4 1 2 8.e-4) =>
((2.2e-4 2.7e-4) 2 1 -1.e-5 1 2 4.e-5)
```

```
(+ 1.9998 2.2e-4) => 2.00002
(+ 2.9997 2.74e-4) => 2.99997
```

したがって x は 2.2 1.98 2.002 1.9998 2.00002 ..., y は 2.7 2.97 2.997 2.9997 2.99997 ... のようにそれぞれ 2 と 3 に近づく.

上の計算は何をやったのか, 図で考えてみる.

図-11 の a (左の図) は, 最初の連立方程式 $((c_0, c_1) = (7, 8))$ を示す. 2本の斜線の交点 (2, 3) が正しい解であるが, 破線で示すように (2.2, 2.7) という誤差のある

解が得られたとする.

(5) により, $(c'_0, c'_1) = (7.1, 7.6)$, したがって $(c_0 - c'_0, c_1 - c'_1) = (-0.1, 0.4)$. b (右上の図) は, $2x + y = -0.1, x + 2y = 0.4$ を示す. 正しい解は図に見るように, $(-0.2, 0.3)$ であり, これを先ほどの誤差のある解 (2.2, 2.7) に足すと正しく 2 と 3 が得られる. しかしまた誤差があり, -0.22 と 0.27 が得られたとする. この値で補正して, $x = 2.2 - 0.22 = 1.98, y = 2.7 + 0.27 = 2.97$ となり, $(c'_0, c'_1) = (6.93, 7.92)$. したがって $(c_0 - c'_0, c_1 - c'_1) = (0.07, 0.08)$. 偶然だが, 最初の式の定数が $1/100$ の式が得られた. おそらく, 規則的な誤差を作っているためであろう.

ところで, a_{00} のような係数は, 1 とか 2 で, c_0 のような定数が $1/100$ のオーダーになったときは, どうするか. 当然 $100x$ と $100y$ を解くことになる. このような臨機応変の対処は, 計算尺を始め, アナコンでは日常茶飯のことであった.

参考文献

- 1) 前島正裕: 九元連立方程式求解機の来歴と計算方法について, 国立科学博物館研究報告 E 類: 理工学, 第 24 巻, pp.25-29 (Dec. 2001).
- 2) Thomson, W.: On a Machine for the Solution of Simultaneous Equations, Proc. Royal Society, Vol.28, pp.111-113 (1878-1879). <http://www.cs.princeton.edu/~ken/thomson1878.pdf>
- 3) Wilbur, J. B.: The Mechanical Solution of Simultaneous Equations, J. Franklin Inst., Vol.222, Issue 6, pp.715-724 (Dec. 1936). <http://www.cs.princeton.edu/~ken/wilbur36.pdf>
- 4) The Office of Charles and Ray Eames, A Computer Perspective, Harvard University Press (1990), 和訳はアスキー出版 (1994). (平成 21 年 6 月 10 日受付)

* 古い情報処理技術遺産を随時解説する.

和田 英一 (名誉会員)
wada@u-tokyo.ac.jp

1955 年東京大学理学部物理学科卒業, 東京大学工学部, 富士通研究所を経て IJ 技術研究所所長, Happy Hacking Keyboard, 和田研フォントの開発に関与. IFIP WG2.1, WIDE プロジェクトメンバ, プログラミング・シンポジウム委員長.

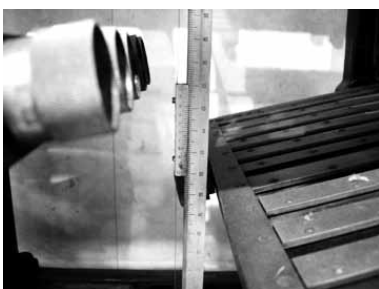


図-10 正弦用目盛尺

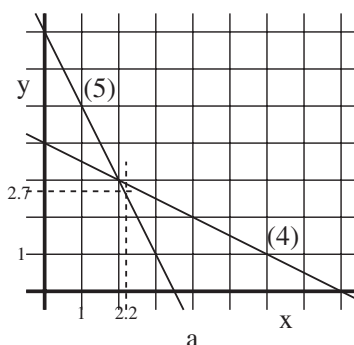


図-11 精度改善の様子

